Université Paris-Saclay CNRS CentraleSupélec

Laboratoire des Signaux et Systèmes

3 rue Joliot-Curie, F-91192 Gif-sur-Yvette cedex
Tél : 01 69 85 17 32 Fax : 01 69 85 17 65 Email : michel.kieffer@universite-paris-saclay.fr

Rapport sur la thèse intitulée

Safe Navigation of a robot in a landmarked environment presentée par Maël Godard

afin d'obtenir le titre de docteur de l'Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées

La commande d'un système nécessite en général une phase de modélisation, souvent à l'aide d'un ensemble d'équations d'état paramétrées, et une phase d'estimation des paramètres de ce modèle à partir de mesures expérimentales. Une région de confiance peut ensuite être associée au vecteur des paramètres afin de tenir compte de l'incertitude d'estimation. La commande du système doit ensuite tenir compte de ces incertitudes, en particulier en présence de contraintes (par exemple de sécurité) sur l'évolution de l'état du système ou lorsqu'un objectif doit être atteint quelle que soit la valeur des paramètres dans la région de confiance considérée. Le système, lors de son évolution, peut également être sujet à des perturbations difficile à modéliser et pouvant nuire au comportement attendu. Un outil essentiel dans ce contexte est l'évaluation de l'ensemble atteignable par un système pour une commande donnée, compte-tenu de l'incertitude sur l'état initial du système, sur les valeurs du vecteur des paramètres et sur l'évolution des perturbations. L'ensemble atteignable permet d'évaluer si le système pourra atteindre un objectif tout en évitant des états interdits ou dangereux.

La thèse de Maël Godard se place dans ce contexte. Il s'est concentré sur des modèles dynamiques à temps continu soumis à des perturbations bornées pour lesquels l'état initial appartient également à un ensemble borné. L'objectif de la thèse est de développer des outils efficaces permettant d'évaluer l'ensemble atteignable en un temps fini. Pour cela, il cherche à décrire la frontière de l'état initial incertain et à déterminer la manière dont cette frontière évolue au cours du temps, en tenant compte des perturbations bornées. Sous des contraintes de régularité de la dynamique, une approximation englobante de la frontière de l'ensemble image par la dynamique peut être obtenue. Ceci permet ensuite à Maël Godard d'obtenir des approximations intérieure et extérieure de l'ensemble atteignable à partir d'un état initial incertain.

Cette thèse comporte sept chapitres principaux, ainsi qu'une introduction, une discussion sur l'implantation des algorithmes proposés et une conclusion.

Dans un chapitre introductif, M. Godard présente le contexte de son travail, motivé par des problématiques de robotique sous-marine, la nécessité d'obtenir des approximations intérieure et extérieure d'ensembles atteignables, ainsi que l'idée de calculer l'image de la frontière de l'ensemble initial pour obtenir ces approximations. La structure de la thèse est ensuite présentée.

Le chapitre 2 rappelle des notions classiques d'analyse par intervalles et de résolution de problèmes de satisfaction de contraintes à l'aide de contracteurs et la représentation d'ensembles à l'aide de pavages. Des représentations alternatives d'ensembles à l'aide de zonotopes et surtout de parallélépipèdes sont également proposées. Les notions de fonction d'inclusion et de contracteurs parallélépipédiques sont introduites. Les propriétés de convergence vers un ensemble image sont rappelées. Des exemples de représentations de frontières d'ensembles à l'aide de pavés et de parallélépipèdes sont également présentées, afin d'obtenir une représentation intérieure à l'aide d'une triangulation de Delaunay. Les bibliothèques qui ont permis d'implanter les algorithmes proposés sont également décrites.

Ce chapitre est bien écrit et bien illustré. Le choix de certains outils et bibliothèques aurait pu être mieux justifié : il existe par exemple une bibliothèque python de construction de triangulation de Delaunay en dimension élevée. Pourquoi utiliser CGAL ?

Le chapitre 3 présente quelques notions de topologie et de géométrie différentielle utiles dans la suite du document. La notion de variété, d'atlas et de cartes sont introduites. Les atlas constitués de cartes dont les domaines sont des boites (*box atlases*) seront particulièrement utiles dans la suite pour représenter des variétés dont on veut calculer l'image par une fonction à l'aide d'outils d'analyse par intervalles. Quelques notions de géométrie différentielle

sont également introduites pour des variétés lisses : espace tangent, espace normal, variété orientée, et application de Gauss. Ces deux dernières notions seront utiles pour distinguer l'intérieur de l'extérieur d'une surface.

Ce chapitre est très court et présente essentiellement des définitions et quelques illustrations bien adaptées. Certaines notions essentielles auraient mérité des rappels plus développés, comme par exemple les notions d'espace tangent, de variété orientée, et d'application de Gauss. Dans la suite du document, les variétés considérées seront essentiellement des cercles, sphères ou hypersphères, pour lesquelles l'obtention de box atlases *est relativement simple. Quelques mots sur la construction d'un atlas dans des situations plus générales auraient été utiles.*

Le chapitre 4 introduit le problème de la caractérisation d'un ensemble atteignable à temps fini pour des systèmes dynamiques à temps continu perturbés, dont la condition initiale est connue et la perturbation reste à l'intérieur d'un compact. L'approche de Lew *et al.* est rappelée. Elle repose sur le principe du maximum de Pontryagin (PMP) qui permet d'obtenir l'enveloppe convexe de l'ensemble atteignable. Une direction de recherche initiale est considérée et la perturbation qui fait évoluer le système au plus loin dans la direction considérée est recherchée. Lorsque la perturbation d'état est additive, il est possible de montrer que la perturbation recherchée appartient à la frontière du compact bornant la perturbation. Un système dynamique augmenté est alors obtenu faisant intervenir la perturbation la plus perturbante. La frontière de l'ensemble atteignable est alors obtenue en considérant différentes directions de recherche. Le cas d'un état initial appartenant à un ensemble compact est brièvement abordé. Enfin, quelques outils d'intégration numérique garantie de systèmes d'équations différentielles ordinaires sont rappelés brièvement.

Les éléments de ce chapitre sont très intéressants et constituent l'un des fondements théoriques de la thèse. Cependant, là aussi, des éléments complémentaires auraient été utiles, en particulier sur le PMP et la manière de construire le système dynamique étendu dont l'intégration permet d'obtenir les frontière de l'ensemble atteignable.

Le chapitre 5 rassemble les premières contributions de cette thèse. Maël Godard y développe la notion de fonction d'inclusion parallélépipédique afin d'obtenir une approximation extérieure parallélépipédique de l'image d'un pavé de petite taille par une fonction non-linéaire $\mathbf{f}$. Une première approximation parallélépipédique est évaluée à l'aide d'un développement de Taylor faisant intervenir la Jacobienne de $\mathbf{f}$. Cette première approximation est ensuite dilatée afin de tenir compte du résidu du développement de Taylor pour obtenir un parallélépipède englobant. Les propriétés de convergence de cette fonction d'inclusion sont établies. Ces résultats sont étendus aux pavés de taille plus importante. Pour cela, Maël Godard propose l'algorithme PEIB qui découpe le pavé initial en pavés de petite taille. L'image de chacun d'eux est approximée à l'aide d'un parallélépipède en utilisant l'approche précédente. L'union de ces parallélépipèdes forme une approximation extérieure de l'image du gros pavé.

Le calcul des approximations intérieure et extérieures de l'image d'un ensemble compact $\mathbb{X}$ par une fonction $\mathbf{f}$ de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ est ensuite abordé. Pour cela, la notion d'atlas gnomonique est exploitée afin de décrire efficacement la surface $\partial\mathbb{X}$ de l'ensemble $\mathbb{X}$ en exploitant les symétries de $\mathbb{X}$. L'algorithme PEIBOS est alors proposé. L'idée est d'utiliser l'algorithme PEIB sur chacune des cartes de l'atlas afin d'obtenir une approximation englobante de l'image de $\partial\mathbb{X}$. A condition que la fonction $\mathbf{f}$ soit au moins localement injective, il est possible de déduire des approximations intérieure et extérieure de l'image de $\mathbb{X}$ par $\mathbf{f}$ à l'aide de l'approximation englobante de $\mathbf{f}(\partial\mathbb{X})$. L'approche proposée est comparée à une approche exploitant uniquement des pavés, montrant qu'elle permet de gagner plusieurs ordres de grandeurs en termes de précision de description.

Cette technique est ensuite étendue à l'évaluation de l'ensemble des états atteignables à partir d'un état initial $\mathbf{x}_0$ appartenant à un ensemble compact $\mathbb{X}_0$ lorsque l'évolution de l'état est décrite par un système dynamique décrit par un ensemble d'équations différentielles ordinaires. Dans ce cas, le flot $\boldsymbol{\phi}$ joue le rôle de la fonction $\mathbf{f}$ et il est nécessaire d'évaluer la Jacobienne du flot pour obtenir le développement de Taylor utilisé précédemment. La Jacobienne satisfait une équation variationnelle qui doit être intégrée en même temps que le système dynamique initial. L'approche proposée est également illustrée sur des exemples.

Ce chapitre présente des résultats très intéressants et combine de manière élégante des outils de topologie avec des techniques d'évaluation ensemblistes. La fonction d'inclusion parallélépipédique est particulièrement adaptée à l'évaluation de l'image de la frontière d'un ensemble par une fonction. La nécessite de disposer d'un box atlas *de l'ensemble $\mathbb{X}$ peut cependant limiter l'applicabilité de PEIBOS. Par ailleurs, des temps de calcul auraient pu être présentés afin de compléter la comparaison entre approche exploitant uniquement l'analyse par intervalles et l'approche proposée. L'obtention de l'approximation intérieure nécessite de déterminer si un point est à l'intérieur ou à l'extérieur de l'enveloppe. Les Alexander rules sont mentionnées. Ces règles étant relativement simples, elles auraient pu être rappelées dans l'état de l'art. Enfin, l'extension aux systèmes d'équations différentielles ordinaires de l'approche proposée aurait mérité quelques développement complémentaires. Comme un atlas décrivant la frontière de l'ensemble $\mathbb{X}_0$ doit être à disposition, il n'est pas possible d'appliquer l'approche proposée itérativement. Pour obtenir une approximation englobante de l'évolution de $\partial\mathbb{X}_0$ à différents instants, une intégration partant de l'instant initial*

d'une dynamique étendue par l'équation variationnelle satisfaite par la Jacobienne est nécessaire. Ceci peut être pénalisant en terme de temps de calcul et engendrer du pessimisme.

Le chapitre 6 aborde l'évaluation de l'ensemble des états atteignables au bout d'un temps T pour un système décrit par une dynamique perturbée par un bruit additif restant dans un ensemble $\mathbb{W}$ et partant d'un état initial appartenant à un ensemble compact $\mathbb{X}_0$. L'idée adoptée est d'évaluer la frontière de l'ensemble atteignable en considérant dans un premier temps que la frontière est lisse. Le fait qu'un vecteur normal à la frontière évoluant suivant la dynamique adjointe reste normal à la frontière de l'ensemble atteignable à tout instant est rappelé dans un premier temps. Ensuite, la frontière est décrite à l'aide d'une fonction niveau, solution d'une équation aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi. Grâce à un résultat de Mitchell *et al.*, il est possible d'évaluer la perturbation qui maximise localement l'expansion de la frontière. Ces deux résultats sont ensuite combinés pour construire une inclusion différentielle considérant les différents états initiaux $\mathbf{x}(0)$ de la frontière $\partial\mathbb{X}_0$, le vecteur normal $\mathbf{q}(0)$ à la frontière, la dynamique initiale dans laquelle la perturbation maximisant localement l'expansion de la frontière est prise en compte et la dynamique adjointe. Une approximation extérieure de la frontière peut alors être obtenue grâce à l'algorithme PEIBOS. Cette approche est ensuite illustrée par l'étude de deux systèmes dynamiques (une *neural ODE* et un modèle de Dubins) lorsqu'un box atlas pour $\partial\mathbb{X}_0$ est disponible.

Le cas d'une frontière non lisse est abordé dans la suite du chapitre. M. Godard montre que la frontière de l'ensemble atteignable est inclue dans l'approximation extérieure qu'il est possible d'évaluer grâce à l'approche proposée pour le cas de frontières lisses. Des frontières fictives peuvent alors apparaître.

Dans ce chapitre, M. Godard combine des résultats élaborés de géométrie différentielle avec les outils de calcul de fonction d'inclusion parallélépipédiques afin d'obtenir une caractérisation de la frontière de l'état atteignable. Ces résultats sont originaux et très intéressants. Quelques illustrations supplémentaires et des preuves plus détaillées auraient permis de faciliter leur compréhension. Des références à des articles sont parfois fournies pour justifier certains passages, ce qui ne facilite pas une lecture suivie. Cependant, ces remarques ne remettent pas en cause la qualité des résultats obtenus. Ici aussi, des temps de calcul auraient pu être fournis afin d'évaluer la complexité de l'approche.

Le chapitre 7 propose une variante de PEIBOS, où la taille des boites appartenant au box atlas décrivant la frontière $\partial\mathbb{X}_0$ est ajustée de manière dynamique. L'objectif est de permettre de vérifier plus efficacement si l'ensemble atteignable au bout d'un temps T satisfait ou non certaines contraintes : aucune intersection avec un ensemble interdit ou inclusion dans un ensemble cible. Le découpage peut rester grossier pour les parties de l'ensemble atteignable satisfaisant largement les contraintes. Il est affiné à proximité des contraintes. Deux exemples sont abordés, montrant l'efficacité de l'approche en termes de temps de calcul par rapport à une approche plus basique où toutes les boites ont la même taille.

Ce chapitre est bien présenté. Les résultats sont plus simples, mais permettent d'améliorer significativement l'efficacité de l'approche proposée dans le chapitre 6.

Le chapitre 8 aborde le problème de l'élimination des frontières fictives lorsque la frontière de l'ensemble image n'est pas lisse. Une interprétation de l'origine de ces frontières artificielles est donnée dans un premier temps. La notion de *box chains* est ensuite introduite. Il s'agit d'un ensemble de boites d'une carte d'un *box atlas*. Il est possible d'ordonner ces boites afin que deux boites successives de la *box chain* ont une intersection non nulle et que la fonction permettant de calculer l'image de l'union de ces boites soit injective. Un algorithme de construction de *box chains* est alors proposé. Il est alors possible d'identifier les *box chains* associées à des frontières fictives en déterminant si elles sont à l'intérieur de la frontière de l'ensemble atteignable. L'efficacité de l'approche est illustrée sur un exemple simple.

Ce chapitre est également bien présenté et bien illustré. L'approche est efficace en dimension relativement faible. Pour des dimensions plus élevée, l'exploitation de fonctions d'inclusion parallélépipédiques est une piste brièvement présentée. Elle aurait pu être un peu plus développée.

Le chapitre 9 présente quelques rappels sur la manière d'obtenir des résultats garantis à l'aide d'une représentation intervalle lorsque des nombres sont représentés en virgule flottante avec une précision finie. Les différents bibliothèques mises en œuvre pour obtenir les résultats présentés dans la thèse sont également présentés.

Le chapitre 10 résumé les principaux résultats de cette thèse et donne quelques perspectives.

Le fait que l'ensemble des codes soient disponibles est très appréciable. Une réflexion plus approfondie aurait pu être menée afin d'identifier des perspectives à un peu plus long terme que celles présentées dans le Chapitre 10. Des perspectives en lien avec les applications en robotique sous-marine présentées en introduction auraient par exemple pu être fournies.

En conclusion, le manuscrit de Maël Godard présente plusieurs contributions originales en lien avec l'évaluation

d'approximations intérieures et extérieures d'un ensemble atteignable. De nombreux outils méthodologiques ont été mis en œuvre tels que l'analyse par intervalles, la topologie, la géométrie différentielle, l'analyse de systèmes dynamiques. Ceci a permis à Maël Godard de développer des résultats élégants et efficaces qui ont fait l'objet de trois publications dans des revues internationales à comité de lecture.

Maël Godard a proposé de nombreuses illustrations afin d'expliquer certains aspects ardus de sa thèse, en particulier dans les preuves des théorèmes qu'il a proposés. Cet effort pédagogique est appréciable. Cependant, par moments, des références ou illustrations fournies comme justification à certaines étapes nuisent à la lisibilité de certaines preuve. Quelques intuitions en lien avec la mécanique des preuves auraient également pu être apportées afin de rendre le manuscrit plus accessible à des étudiants de master.

Maël Godard a fourni un travail de thèse original et de qualité. Les points mentionnés précédemment pourront être en partie traités avant le dépôt final du manuscrit. J'émets donc un avis favorable à la présentation de ces travaux lors d'une soutenance de thèse.

Par ailleurs, je déclare n'avoir aucun conflit d'intérêt en relation avec cette thèse.

Gif-sur-Yvette, 1er octobre 2026
Michel Kieffer



Professeur à l'Université Paris-Saclay